الأعداد العقدية

التمرين رقم 01

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{u},\vec{v})$.

لتكن A و B نقطتين لحقيهما على التوالي 1- و1 ولتكن M نقطة تحقها Z_M و N نقطة لحقها $\frac{1}{Z_M}$ حيث Z_M عدد عقدي غير منعدم.

1 – بين ان: $AN=\frac{AM}{OM}$

2 – نفترض فيما تبقى من التمرين أن M تنتمي إلى دائرة مركزها B وشعاعها $\sqrt{2}$

نضع: $Z_M=x+iy$ حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$

a – بين أن: $x^2+y^2=2x+1$

b – تحقق أ ن: $|Z_M+1|^2=2|Z_M|^2$ و أستنتج قيمة MA بدلالة MO

3 – إستنتج قيمة NA

4 – a – بإستعمال نتيجة السؤال 2 – a) بين أن :

$$1-\frac{1}{Z_M}=\frac{1}{|Z_M|^2}(Z_M+1)$$

b – إستنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BN}$ مستقيميتين

c – بين أن: $|Z_M|=1\Leftrightarrow\|\overrightarrow{BN}\|=\|\overrightarrow{AM}\|$

ثم حدد التموضعين الممكنين للنقطة M و بين أن الرباعي MBNA مربع في كلتا التموضعين

التمرين رقم :02

نضع : $Z=\sqrt{2}(1+i)$

1 – a – أحسب مجموع الجدور من الرتبة 10 للعدد 1 في المجموعة $\mathbb{C}$

b – استنتج مجموع الجدور من الرتبة 10 للعدد Z

2 – نضع: $U_n=Z^n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

a – اكتب U_n على الشكل المثلثي

b – حدد الشكل المثلثي للجداء:

$$W_n=U_0\cdot U_1\cdot U_2\cdots U_n$$

c – استنتج أن : $W_{10}=2^{54}\bar{Z}$

التمرين رقم : 03

نضع: $f(Z)=Z^2-9\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z-81\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

حيث $Z\in\mathbb{C}$

1 – أحسب $f(9)$ و استنتج حلول المعادلة $f(Z)=0$

2 – حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$$(E):\qquad Z^8-9\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z^4-81\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

3– نضع : $\alpha=i\sqrt{3}$ و $\beta=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

و $\lambda=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث: $\theta\in]0,\pi[$ و $r\in\mathbb{R}_*^+$

a – حدد r و θ بحيث تكون الأعداد α و λ وβ في هذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية (U_n)

b – حدد معيار وعمدة U_n علما أن $U_0=i\sqrt{3}$

c – حدد قيم العدد الصحيح الطبيعي n التي من أجلها $U_n\in\mathbb{R}$

4 – المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

حدد مجموعة النقط M التي لحقها Z يحقق: $\beta Z^2-\alpha|Z|=0$

التمرين رقم : 04

I – نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E):2Z^2+3\bar{Z}^2=5+i$

1 – بين أن: $Z^2+\bar{Z}^2=2$ و $Z^2-\bar{Z}^2=-2i$

2 – a – استنتج الشكل المثلثي للعدد العقدي Z^2

b – استنتج حلي المعادلة: (E)

II – نضع: $A_n=\frac{1}{2}\left((\bar{Z}^2)^n+(-Z^2)^n\right)$ حيث

n عدد صحيح طبيعي و Z حل للمعادلة (E)

1 – بين أن:

$$A_n=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)\qquad(\forall n\in\mathbb{N})$$

2 – ليكن p عددا صحيحا طبيعيا

a – أثنت أن العدد A_{2p} حقيقي

b – أثبت أن العدد A_{2p+1} تخيلي صرف

التمرين رقم : 05

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ الحدودية التالية :

$$Q(z)=z^3+(1-3i)z^2+(1-3i)z-3i$$

1 – أ – تحقق أن : المعادلة $Q(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0

ب – استنتج z_1 و z_2 الحلين الآخرين للمعادلة : $Q(z)=0$ و حدد شكلهما الأسي

ج – بين أن: $\left(\dfrac{z_0}{3}\right)^{2010}+z_1^{2010}+z_2^{2010}=1$

2 – في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A وB و C التي ألحاقها على التوالي هي : z_0 و z_1 و z_2

و ليكن T_1 و T_2 التطبيقين من (P) نحو (P) اللذان يربطان كل نقطة $M(z)$ بصورتها $M'(z')$ و المعرفين على التوالي بصيغهما العقدية كما يلي :

$$z'=3(z+2i)$$

و $2z'+(1+i\sqrt{3})z+\sqrt{3}-3i=0$

أ – حدد مجموعة النقط الصامدة بكل من T_1 و T_2

ب – بين أن: T_1 تحاك محددا مركزه ونسبته وأن T_2 دوران محددا مركزه وزاويته

3 – لتكن B' و C' صورتي النقطتين B و C على التوالي بالدوران T_2

أ – حدد لحق I منتصف القطعة $[BC]$ ثم استنتج لحق I' منتصف القطعة $[B'C']$

ب - مثل النقط B و C و B' و C' في المستوى العقدي (P)

التمرين رقم : 06

ليكن $Z=[1,\alpha]$ بحيث $\alpha\in\,]\pi,2\pi[$

1 – a – تحقق أن:

$$1+\cos\alpha+i\sin\alpha=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

b– استنتج الشكل المثلثي للعدد العقدي 1+Z

2 – نضع: $f(Z)=iZ+i$

بين أن: $f(Z)=\left[-2\cos\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\alpha-\pi}{2}\right]$

3 – ليكن $Z_0=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

a – أكتب $(f(Z_0))^{10}$ على شكله الجبري

b – بين أن لكل عدد صحيح نسبي n

$$\left(\frac{\overline{(f(Z_0))^{10}}}{2}\right)^n-\left(\frac{(f(Z_0))^{10}}{2}\right)^n=\frac{i}{2^{n-1}}\sin\frac{n\pi}{3}$$

4 – في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي: $-\sqrt{3}i$ و Z_0 و $(f(Z_0))^{10}$

a – حدد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

b – استنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين رقم : 07

ليكن $Z\in\mathbb{C}-\{-1,1\}$ و $\overline{Z}$ مرافقه

نضع: $f(Z)=\dfrac{Z}{1-Z^2}$

1 – تحقق أن:

$$f(Z)=\frac{Z\left(1-\overline{Z}^2\right)}{\left|1-Z^2\right|^2}\quad\left(\forall Z\in\mathbb{C}-\{-1,1\}\right)$$

2 – نضع: $Z=x+iy$ و $Z\left(1-\overline{Z}^2\right)=\alpha+i\beta$

حيث x وy و α و β أعداد حقيقية.

بين أن: $\alpha=x-x^3-xy^2$

و أن: $\beta=y+y^3+x^2y$

3 – المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{u},\vec{v})$.

لتكن (φ) مجموعة النقط M من (P) بحيث لحقها Z يحقق: $f(Z)$ تخيلي صرف.

حدد المجموعة (φ)

4 – نضع: $Z=\cos\theta+i\sin\theta$ حيث $\theta\in\,]0,\pi[$

a – بين أن: $\left|1-Z^2\right|=2\sin\theta$

b – بين أن: $1-\overline{Z}^2=\left[2\sin\theta,\dfrac{\pi}{2}-\theta\right]$

c – إستنتج الشكل المثلثي للعدد العقدي $Zf(Z)$

d – نضع : $Z_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

حدد الشكل الجبري للعدد العقدي $\left(Z_0f(Z_0)\right)^6$

التمرين رقم : 08

نعتبر المعادلة (E) التالية:

$Z \in \mathbb{C}-\{1\}$ حيث $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4=0$

1 –حدد الجدور من الرتبة 5 للعدد 1

2 – نضع: $Z_1=\left[1,\frac{2\pi}{5}\right]$ و $Z_2=\left[1,\frac{4\pi}{5}\right]$

بين أن حلول المعادلة (E) هي الأعداد Z_1 و Z_2 و $\overline{Z_1}$ و $\overline{Z_2}$

3 – a – بين أنه إذا كان Z حل للمعادلة (E) فإن

$y=Z+\frac{1}{Z}$ حل للمعادلة: $y^2+y-1=0$

b – استنتج حلول المعادلة $y^2+y-1=0$ بدلالة Z_1 و Z_2

c – استنتج قيمة كل من $\cos\frac{2\pi}{5}$ و $\cos\frac{4\pi}{5}$

التمرين رقم : 09

I) - نضع : $Z=\left[1,\frac{\pi}{6}\right]$

1 – أحسب بطريقة جبرية و بطريقة مثلثية التعبير التالي:

$$S=1+Z+Z^2+\cdots+Z^{46}$$

2 – نعتبر التعبيرين التاليين:

$$S_1=\sum_{k=0}^{k=46}\cos\left(2a+\frac{k\pi}{6}\right)\ ;\ S_2=\sum_{k=0}^{k=46}\sin\left(2a+\frac{k\pi}{6}\right)$$

حيث a عدد حقيقي معلوم.

أحسب: S_1 و S_2 بدلالة a

3 – نعتبر التعبيرين التاليين:

$$A_1=\cos^2 a+\cos^2\left(a+\frac{\pi}{12}\right)+\cdots+\cos^2\left(a+\frac{46\pi}{12}\right)$$

$$B_1=\sin^2 a+\sin^2\left(a+\frac{\pi}{12}\right)+\cdots+\sin^2\left(a+\frac{46\pi}{12}\right)$$

أحسب A و B بدلالة a

II) – نضع: $Z=\left[1,\frac{2\pi}{7}\right]$

1 - a – أحسب المجموع التالي:

$$1+Z+Z^2+Z^3+Z^4+Z^5+Z^6$$

b – إستنتج قيمة كل من التعبيرين التاليين:

$$\Sigma_1=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}$$

$$\Sigma_2=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}+\sin\frac{10\pi}{7}+\sin\frac{12\pi}{7}$$

2 – ليكن $q=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

a – أحسب: $\frac{q}{1-q}$

b – نعتبر التعبيرين التاليين:

$$T_1=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{2\pi}{4}+\cdots+\sin^{23}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{23\pi}{4}$$

$$T_2=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{2\pi}{4}+\cdots+\sin^{23}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{23\pi}{4}$$

أحسب T_1 و T_2

التمرين رقم :10

نعتبر العدد العقدي: $Z_\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}+i\,\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$ حيث:

$\theta\in\left]-\pi,\pi\right[-\{0\}$

1 – حدد معيار وعمدة العدد العقدي Z_0 تبعا لقيم θ

2 – حدد θ التي من أجلها $OM_\theta=\sqrt{2}$ حيث M_θ صورة العدد العقدي Z_0 في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

3 – نضع:

$P_\theta(Z)=Z^3-(2+Z_\theta)Z^2+2Z(1+Z_\theta)-2Z_\theta$

a – أحسب $P_\theta(Z_\theta)$

b – استنتج مجموعة حلول المعادلة: $P_\theta(Z)=0$

c – ليكن Z_1 و Z_2 الحلين الآخرين للمعادلة $P_\theta(Z)=0$

بحيث: $\mathrm{Im}(Z_1)\rangle 0$ و $\mathrm{Im}(Z_2)\langle 0$

حدد طبيعة المثلث BOA حيث A وB هما على التوالي صورتي Z_1 و Z_2 في المستوى العقدي

4 – بين أن: $Z_1^8+Z_2^8+Z_{\frac{\pi}{4}}^8\rangle 0$

التمرين رقم : 11

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$

لكل z من $\mathbb{C}-\{-i,i\}$ نضع: $f(z)=\dfrac{-iz}{i(iz)^2-i}$

1 – a – حدد في $\mathbb{C}-\{-i,i\}$ العددين z_1 و z_2 حلي المعادلة : $f(z)=1$ بحيث : $\mathrm{Im}(z_1)>0$

b – بين أن:

$$\forall z\in\mathbb{C}-\{-i,i\}\quad f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(z-\bar{z})\left(|z|^2-1\right)=0$$

c – استنتج في المستوى العقدي (P) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $f(Z)$ عددا حقيقيا

d – بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا :

$$\frac{z_1^n+z_2^n}{2}=\cos\frac{n\pi}{3}$$

2 – نعتبر في المستوى العقدي (P) النقط A و B و C

التي ألحاقها على التوالي هي : $a=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

و $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}$ و $c=1+\bar{b}$

و ليكن T التحويل من (P) نحو (P) الذي يربط كل نقطة M ذات اللحق z بصورتها M' ذات اللحق z'
و المعرف بتمثيله العقدي التالي :

$$z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z-e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}$$

a – بين أن : $z_0=\left[2\cos\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{12}\right]$

(تذكر أن : $1+\cos 2x=2\cos^2 x$
و أن : $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$)

b – استنتج القيمة المضبوطة ل $\cos\dfrac{\pi}{12}$

c – بين أن : T دوران مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$

d – تحقق أن : $\dfrac{b-a}{c-a}=\left[1,\dfrac{\pi}{3}\right]$ ثم استنتج أن C هي صورة B بالدوران T ثم مثل في المعلم $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقط : A و B و C

التمرين رقم : 12

الجزء A :

1 – حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E):\qquad z^2-2z+4=0$$

نرمز ب z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E) بحيث : $\mathrm{Im}(z_1)\rangle 0$

2 – أكتب العدد $(z_1)^{2004}$ على الشكل الأسي ثم على الشكل الجبري

الجزء B :

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ (وحدة القياس $2cm$)

1 – أ - أثبت أن: النقطتين $A(1+i\sqrt{3})$ و $B(1-i\sqrt{3})$ تنتميان إلى نفس الدائرة التي مركزها O و يتم تحديد شعاعها

ب - أنشئ هذه الدائرة ثم مثل النقطتين A وB

2 – لتكن O' صورة النقطة O بالدوران R_1 الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{-\pi}{2}$ و B' صورة النقطة B بالدوران R_2 الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

حدد لحقي كل من O' و B' و انشئهما

3 – ليكن I منتصف القطعة $[OB]$

أ – حدد لحق المتجهة $\overrightarrow{AI}$

ب – أثبت أن لحق المتجهة $\overrightarrow{O'B'}$ هو $3\sqrt{3}-i$

ج – ماذا يمثل المستقيم (AI) بالنسبة للمثلث $AO'B'$